Ricardo Castellano, José Luis Mesa, Clara Briand

PROHIBIDO DERIVADAS. ¡¡CÁLCULO $\leq$ DESIGUALDADES!!

1. Desigualdades básicas

- **Desigualdad de las medias.** Sean $a_1, ..., a_n$ números reales positivos. Entonces

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}}$$

  La igualdad se da si y solo si $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

- **Desigualdad de Cauchy - Schwarz.** Sean $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$ números reales. Entonces

$$(a_1 \cdot b_1 + ... + a_n \cdot b_n)^2 \leq (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$$

  La igualdad se da si y solo si los vectores $(a_1, ..., a_n)$ y $(b_1, ..., b_n)$ son proporcionales.

- **Desigualdad de reordenamiento.** Sean $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$ números reales positivos tales que $a_1 \leq ... \leq a_n$ y $b_1 \leq ... \leq b_n$, y sea $a'_1, ..., a'_n$ una permutación de $a_1, ..., a_n$. Entonces

$$a_1 \cdot b_n + ... + a_n \cdot b_1 \leq a'_1 \cdot b_1 + ...a'_n \cdot b_n \leq a_1 \cdot b_1 + ... + a_n \cdot b_n$$

  La igualdad se da si y solo si $a_1 = a_2 = ... = a_n$ o $b_1 = b_2 = ... = b_n$.

- **Desigualdad de Jensen.** Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa en el intervalo $[a, b]$. Entonces, para todo $x_1, ..., x_n \in [a, b]$ y para todo $t_1, ..., t_n \in [0, 1]$ tales que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, se cumple que

$$f(t_1 \cdot x_1 + ... + t_n \cdot x_n) \leq t_1 \cdot f(x_1) + ... + t_n \cdot f(x_n)$$

2. Problemas

1. (Fase local OME 2022) Sean $a_1, ..., a_n$ números reales diferentes, de manera que ninguno de ellos es igual a 0. Supongamos que

$$(a_1^2 + ... + a_{n-1}^2) \cdot (a_2^2 + ... + a_n^2) = (a_1 \cdot a_2 + ... + a_{n-1} \cdot a_n)^2$$

   Demostrar que $a_1, ..., a_n$ están en progresión geométrica.

2. Sean $a, b, c > 0$. Demostrar que
$$\frac{a + b + c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

3. (Fase local OME 2014) Sean a, b reales positivos. Probar que

$$a + b \geq \sqrt{ab} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

4. (Fase local OME 2013) Obtener los dos valores enteros de x más próximos de 2013, tanto por defecto como por exceso, que cumplen esta ecuación trigonométrica:

$$2^{sen^2(x)} + 2^{cos^2(x)} = 2\sqrt{2}$$

5. Encontrar el mínimo de $\frac{sen^3(x)}{cos(x)} + \frac{cos^3(x)}{sen(x)}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
   Nota: se recuerda que las derivadas están prohibidas en esta sesión.

6. Sea P(x) un polinomio con coeficientes reales y positivos. Demostrar que si la desigualdad $P(\frac{1}{x}) \geq \frac{1}{P(x)}$ se cumple para $x = 1$, entonces se cumple para todo $x > 0$.

7. Demostrar que
$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

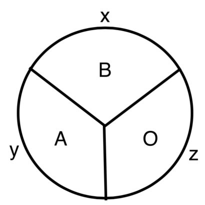
8. (Corea, 1995) Sea S un conjunto de puntos en el plano con la siguiente propiedad: cualquier trío de puntos forma un triángulo de área menor o igual a 1. Demostrar que todos los puntos de S están en un triángulo de área menor o igual a 4.

9. (Canada, 2002) Demuestra que para todos los reales positivos a, b, c se cumple que
$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$$

10. En una mesa hay cincuenta relojes, todos sincronizados. Demostrar que en algún momento, la suma de las distancias del centro de la mesa al centro de cada reloj es menor o igual que la suma de las distancias del centro de la mesa a la punta de las agujas del minuto.

11. (Olympiad Inequalities, Thomas Mildorf) Sean a, b, c reales positivos. Prueba que
$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}$$

12. La ruleta de la siguiente imagen tiene longitud 1. Se gira 6 veces. ¿Qué valores de x, y, z maximizan la probabilidad de que salga la palabra BAOBAB, donde x, y, z son las longitudes de los sectores que contienen a las letras B, A, O respectivamente?



13. (Polonia 2001) Demostrar que
$$x_1 + 2x_2 + ... + nx_n \leq \frac{n(n-1)}{2} + x_1 + x_2^2 + ... + x_n^n$$
donde $x_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

14. Sean $x, y, z > 0$, probar que
$$\frac{x}{\sqrt{y+x}} + \frac{y}{\sqrt{z+x}} + \frac{z}{\sqrt{x+y}} \geq \sqrt{\frac{3(x+y+x)}{2}}$$
Nota: en este problema podéis derivar (¡es una excepción!)

15. En cierta clase hay 25 estudiantes. Se realiza un examen final con varias preguntas donde cada pregunta tiene 5 respuestas posibles. Cada pareja de estudiantes coincide en a lo sumo una respuesta. Demostrar que en el examen no hay más de 6 preguntas.

Varios problemas de esta lista se han sacado del libro Problem-Solving Strategies de Arthur Engel (muy recomendado).